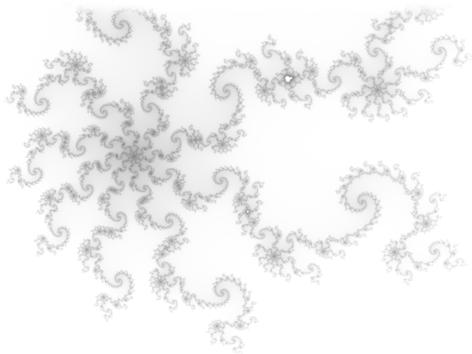
Ludwik Błyszczak

# O fraktalach



Wydanie elektroniczne
Pyskowice 2023



Producent PDF: MiKTeX pdfTeX-1.40.25

# Spis treści

## Algorytmy przyrody

Fraktale? Co to takiego?

Wypada zacząć od matematyki, bo – najkrócej rzecz ujmując – fraktale to skomplikowane geometryczne obiekty. Wiele jest ich matematycznych definicji. Jedną z najbardziej zwięzłych podał w swojej książce *Fraktale i chaos* profesor Jacek Kudrewicz: *Fraktalem na płaszczyźnie nazywamy dowolny niepusty i zwarty podzbiór płaszczyzny X.*

Nie mam zamiaru zanudzać Cię tutaj matematycznymi wywodami. Skupię się tylko na trzech własnościach, które czynią z fraktali twory naprawdę przedziwne.

Po pierwsze. Fraktal nie rodzi się ze wzoru matematycznego, ale określa go pewna zależność rekurencyjna. Jest dzieckiem funkcji iteracyjnej – zbiorem, który powstaje przez wielokrotne powtarzanie (iterowanie) ścisłych algorytmów matematycznych. Wynik poszczególnego algorytmu zostaje dodany jako wartość do kolejnego powtórzenia, itd. Im więcej takich powtórzeń-iteracji, tym nasz fraktal nabiera bardziej pełnokrwistych, wyrazistych kształtów. Niekiedy liczba iteracji może zamykać się w milionach albo nawet miliardach. Dlatego geometria fraktalna mogła się rozwinąć dopiero wtedy, gdy nastała era komputerów o wystarczająco sprawnych i szybkich procesorach.

Po drugie. Fraktal cechuje się samopodobieństwem. Własność ta oznacza, że dowolny fragment fraktala w dowolnym powiększeniu przypomina w jakimś stopniu inne jego fragmenty albo całą strukturę. Dobrym tego przykładem są fraktale afiniczne, np. paproć Barnsleya.

Po trzecie. Fraktal ma wymiar ułamkowy – zawierający się np. między 0 a 1. Nie jest krzywą, dwuwymiarową powierzchnią ani trzywymiarową bryłą. Nie jest więc figurą geometryczną w znaczeniu klasycznej geometrii euklidesowej. Nasze myślenie tak przywykło do tej geometrii, że trudno nam sobie wyobrazić, iż jakaś matematyczna struktura może już nie być linią, a jeszcze nie mieć pełnych cech powierzchni. Mając na uwadze tę własność, Benoît Mandelbrot – ojciec teorii fraktali – wymyślił słowo fraktal pochodzące od łacińskiego słowa *fractus*, które właśnie oznacza *ułamkowy*, *cząstkowy*, *częściowy*, *złamany*.

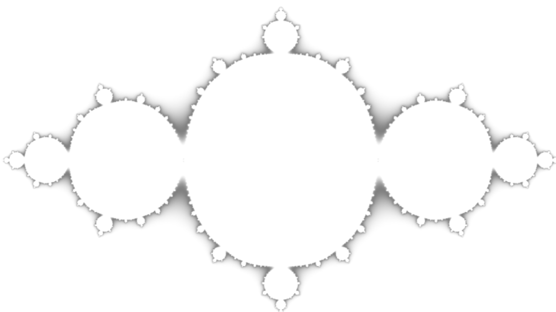
il. 1: *paproć Barnsleya*

Z fraktalami stykał się człowiek – nie zdając sobie z tego sprawy – od zarania swojej historii. Nie mogło być inaczej, bo po prostu w całej przyrodzie, a zwłaszcza w przyrodzie ożywionej, wszechobecne są struktury fraktalne o nieogarnionej złożoności i różnorodności. Rośliny rosnąc, wypuszczając pędy, liście i kwiaty, realizują w swoich rozwijających się kształtach pewne fraktalne algorytmy. Tak samo czynią ślimaki budując spiralne – prawie zawsze prawoskrętne – muszle. Fraktalnymi formami są np. ptasie pióra, desenie na skórze krokodyla, nasze linie papilarne, fale piasku na pustyni, układy chmur czy spirale galaktyk i obszary mgławic. Właśnie na podstawie takich form ludzie budowali i rozwijali własne wyczucie piękna – ludzką estetykę. Świadczą o tym wzory ryte i malowane na prehistorycznych rzeźbach i naczyniach, różnorodne ornamenty roślinno-geometryczne zdobiące ściany świątyń najstarszych cywilizacji, bogata ornamentyka perskich dywanów, buddyjskie wielobarwne mandale albo jawajskie tkaniny zdobione techniką batiku.

Przeczuwając, że cała rzeczywistość jest bytem o fraktalnych cechach, że wszelkie elementy rzeczywistości przenikają się wzajemnie, są od siebie zależne, i że całość wszechświata w jakiś przedziwny, mistyczny sposób zawiera się w każdym jego fragmencie, wielu myślicieli, filozofów, poetów odkrywało uniwersalne systemy religijne, tworzyło wielkie filozofie i rozwijało poetycką mistykę. Żeby się o tym przekonać, wystarczy się zagłębić w filozofię buddyjską, poznać główne idee hinduizmu albo sięgnąć po twórczość wybitnego angielskiego poety, malarza i rytownika doby romantyzmu – Williama Blake'a.

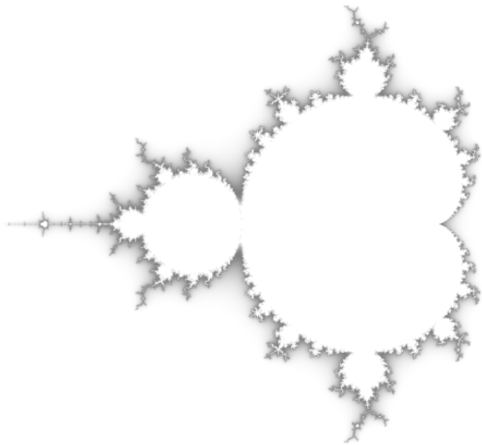
Do świata ścisłej matematyki fraktale trafiły dopiero na przełomie XIX i XX wieku, chociaż nikt ich wtedy fraktalami nie nazywał i traktowano je jako niepoważne geometryczne ciekawostki, matematyczne dziwolągi, które kłócą się z porządkiem Euklidesa. Najbardziej znane z nich to: zbiór Cantora, śnieżynka von Kocha, dywan Sierpińskiego i trójkąt Sierpińskiego. Obecnie zaliczane są do fraktali klasycznych. Duże znaczenie dla następnych naukowych rozważań miały fraktale brzegowe, które w okresie I Wojny Światowej badał francuski matematyk Gaston Maurice Julia (1893 – 1978), a które później zostały nazwane – na jego cześć – zbiorami Julii.

il. 2: *Gaston Maurice Julia (1893 – 1978)*



il. 3: *zbiór Julii*

Jednak wyjątkowy rozwój geometrii fraktalnej nastąpił w drugiej połowie XX wieku dzięki osiągnięciom Benoît Mandelbrota – wybitnego francuskiego matematyka, pochodzenia polskiego. Mandelbrot – opierając się m.in. na pracach Gastona Julii – zaczął po nowatorsku badać pewne wielomiany kwadratowe, mianowicie jako pierwszy użył do tego najnowocześniejszych wówczas komputerów. Około roku 1979, iterując na komputerze IBM jeden z prostych wielomianów $Z = Z^2 + C$, odkrył zbiór, który szybko stał się najsłynniejszym fraktalem. Wkrótce bowiem zrozumiano, że jest to zdumiewająco piękny oraz najbardziej skomplikowany obiekt oglądany przez człowieka.

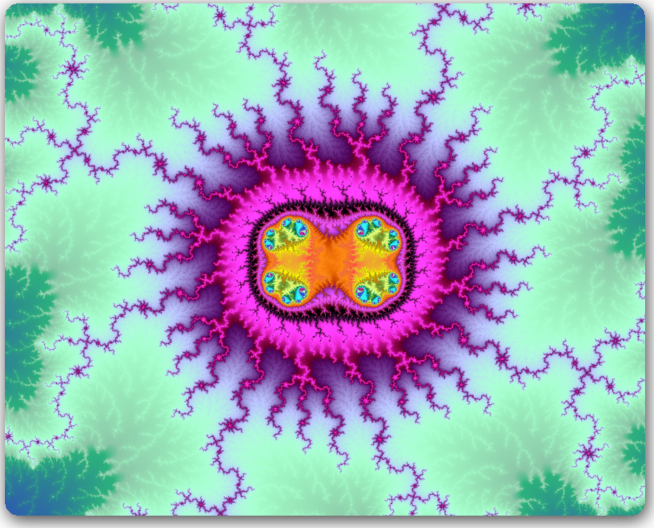


il. 4: *zbiór Mandelbrota*

O niezwykłości tego fraktala najlepiej przekonać się samemu, przeglądając go i powiększając w odpowiednim programie komputerowym. Możesz bowiem nieskończenie powiększać obszar zbioru Mandelbrota i zawsze gdzieś spotkasz formę jego całości, otoczoną – za każdym razem innym – systemem deseni i wypustek. Co ta forma przypomina? Jedni widzą w niej żuka, inni – jakiś fantastyczny liść, a niektórym, również i mi, przywodzi na myśl postać Buddy pogrążonego w kontemplacji.

Zachęcam do samodzielnych wędrówek po fraktalnym wszechświecie pełnym coraz to nowych przejawów matematycznej harmonii oraz skłaniającym do wielu dziwnych, mistycznych przemyśleń. Spotkasz w nim fantastyczne kwiaty, drzewa, rozety, mandale oraz niepowtarzalne oniryczne desenie, a czasem stwory takie jak ten nazwany przeze mnie *ma-*

*tematyczną komórką*. Schwytałem go, powiększając pewne współrzędne zbioru Mandelbrota do rozmiarów wręcz astronomicznych, bo około 18 000 000 000 000 000 razy. Prawda, że przypomina jakąś niesamowitą formę życia?



il. 5: *matematyczna komórka*

Jak rozpocząć taką wyprawę? Czym się posłużyć? W Internecie znajdziesz wiele dobrych – bezpłatnych i komercyjnych – generatorów fraktali. Jednym z lepszych i darmowych jest Fraqtive – aplikacja stworzona przez utalentowanego programistę Michała Męcińskiego. Program pracuje w systemach Windows, Mac OS, Linux i BSD. Znajdziemy w nim wszystkie podstawowe funkcje potrzebne do wygodnego generowania, przeglądania i graficznego utrwalania fraktalnego świata. Interfejs programu został wprawdzie napisany po angielsku, ale jest tak jasny i intuicyjny, że nikomu nie powinien sprawić kłopotów.

Jeśli jednak chcesz mieć jeszcze większy wpływ na generowanie fraktali i tworzenie grafik fraktalnych, możesz zakupić licencję na program Ultra Fractal – jeden z najlepszych w swojej klasie. Jego twórcą jest Holender – Frederik Slijkerman. Aplikacja ma naprawdę duże możliwości – pozwala m.in. na łączenie wielu warstw graficznych oraz tworzenie własnych formuł fraktalnych. Działa w różnych wersjach systemu Windows, ale również da się uruchomić pod Linuxem – w emulatorze WINE albo w maszynie wirtualnej VMware. Obsługa Ultra Fractala należy do równie intuicyjnych jak w przypadku programu Fraqtive.

Ale pamiętaj... Przemierzając nieskończone fraktalne przestrzenie, warto uważać, żeby się zanadto w tej wędrówce nie zatracić, nie zapędzić zbyt głęboko... Mądry podróżnik zawsze wie, kiedy należy wrócić do własnej chaty. Zresztą wcale nie trzeba wychodzić z domu, aby spotkać fraktale. Przecież już starożytni mędrcy nauczali, że każdy z nas nosi w sobie odbicie całego Wszechświata.

## Benoît Mandelbrot

Klucz do nieskończonego ogrodu fraktali odnalazł francuski matematyk – Benoît Mandelbrot.


il. 6: *Benoît Mandelbrot na fotografii z roku 1997*

Urodził się 20 listopada 1924 roku w Warszawie, w rodzinie litewskich wykształconych Żydów. Jego ojciec pracował jako kupiec w branży tekstylnej, a matka była dentystką. Wielki wpływ na rozwój młodzieńczych matematycznych zainteresowań przyszłego uczonego miał jego wuj – wybitny matematyk Szolem Mandelbrojt (1899 – 1983).

W 1936 roku Mandelbrotowie wyemigrowali do Francji i zamieszkali w Paryżu, gdzie mieszkał już Szolem Mandelbrojt. Okres hitlerowskich prześladowań rodzina przetrwała na francuskiej prowincji – w mieście Tulle. Ukrywając żydowskie pochodzenie, nastoletni Benoît przez pewien czas uczył się ślusarstwa. Okupacja sprawiła, że podstawową szkolną wiedzę zdobywał bardzo nieregularnie. Jednak w gronie jego nauczycieli, z którymi łączyła go prawdziwa przyjaźń, znalazło się wiele ówczesnych naukowych sław, również rzuconych do Tulle przez wojenną zawieruchę. Dzięki takim nauczycielom oraz własnym zdolnościom udało mu się zdobyć podstawowe wykształcenie, chociaż – jak sam wspomina – nigdy nie nauczył się alfabetu ani mnożenia powyżej pięciu.

Po wyzwoleniu postanowił kontynuować naukę. Po studiach w Lyonie ukończył w Paryżu École Normale i École Polytechnique. Doktorat z matematyki obronił na Université de Paris. W latach 1949 – 1957 pracował w Centre National de la Recherche Scientifique w Paryżu, a następnie na Uniwersytecie w Lille.

W 1958 roku Mandelbrot przeniósł się do USA. Pracując w dziale naukowo-badawczym firmy IBM (IBM Thomas J. Watson Research Center) wpadł w latach siedemdziesiątych dwudziestego wieku na pomysł, żeby wykorzystać komputery do badania zachowania się iteracji pewnych funkcji zespolonych, którymi wcześniej zajmowali się dwaj wybitni francuscy matematycy – Gaston Julia i Pierre Fatou. Wygenerowane w ten sposób przedziwne zbiory nazwał fraktalami. W następnych latach – coraz dogłębniej badając fraktale – rozwinął nowy dział geometrii – geometrię fraktalną i stworzył spójną teorię fraktali.

W roku 2003 za osiągnięcia w dziedzinie geometrii fraktalnej otrzymał prestiżową japońską Nagrodę Nobla (Japan Prize for Science and Technology). W dniu 10 maja 2005 roku odebrał w Warszawie Medal im. Wacława Sierpińskiego przyznawany przez Oddział Warszawski Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Uniwersytet Warszawski.

Od roku 1993 Benoît Mandelbrot był honorowym członkiem IBM Thomas J. Watson Research Center, a od roku 1999 pracował jako profesor nauk matematycznych na Wydziale Matematyki Uniwersytetu Yale (Yale Mathematics Department).

Benoît Mandelbrot zmarł 14 października 2010 roku w hospicjum w Cambridge (Massachusetts) na raka trzustki.

Należał do tych wyjątkowych naukowców-odkrywców, którzy swoje osiągnięcia zawdzięczają nie tylko wytężonej pracy i solidnej wiedzy, ale przede wszystkim niezwykłej intuicji połączonej z zawsze młodzieńczą wyobraźnią. Odkrycia tych uczonych są początkowo lekceważone, a nawet wyśmiewane przez poważny świat nauki. Jednak wkrótce i nieuchronnie ujawniają one swoją bezcenną wartość, a horyzonty ich ogólnoludzkiej przydatności zdają się nie mieć granic.

## Moje fraktale

Z fraktalami – zupełnie sobie tego nie uświadamiając – spotykałem się już w dzieciństwie. Gdy w wyniku intensywnej rehabilitacji nauczyłem się dość sprawnie chodzić, opuszczałem z tatą nasze miasteczko, żeby odkrywać przyrodę okolicznych łąk, pól i lasów. Często doskwierał nam letni upał, suchy kurz gliniastych ścieżek mieszał się z potem na twarzy, a czasem przemierzaliśmy prawdziwe chaszcze zarośnięte dzikimi malinami, jeżynami, łopianami i rdestowcami. Trud tych pieszych eskapad był w pełni wynagradzany odpoczynkiem wśród leśnych paproci, podpatrywaniem żaby o skórze pokrytej ładnym deseniem, podglądaniem wielkiej ważki, która przysiadła na kwiatostanie barszczu w towarzystwie chrząszczy połyskujących bursztynem i szmaragdem, czy możliwością łagodnego zdmuchnięcia motyla, który wysączał nektar z kwiatu ostu, a który odlatując ukazywał duże szafirowe oczy wymalowane na skrzydłach, migające w słońcu jak spojrzenie zaczarowanej księżniczki.

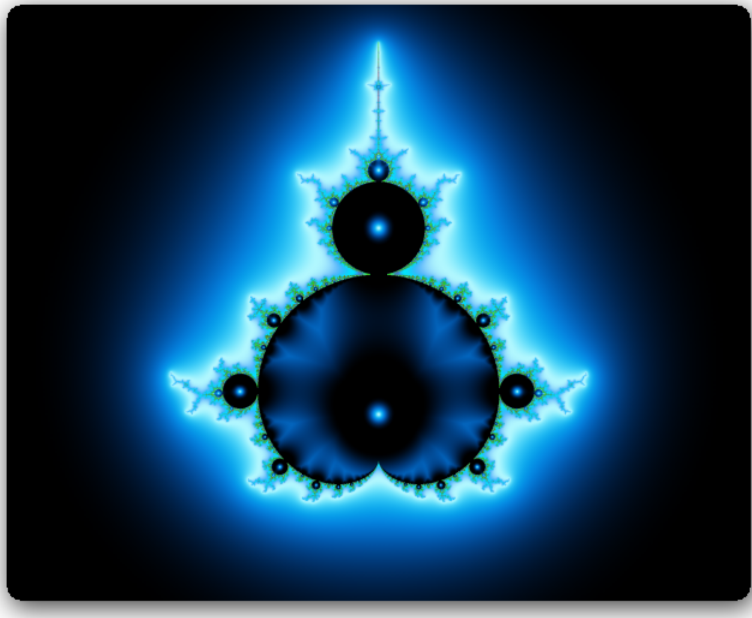
Taty już nie było na tym świecie, kiedy zacząłem poznawać komputery. W Internecie trafiłem na odkrycie Mandelbrota, uruchomiłem generator fraktali i oto znalazłem się w przedziwnym matematycznym ogrodzie, który nie ma granic. To, co w nim ujrzałem, wydało mi się jednak znajome – jawiło się jako osobliwe odbicie, doskonała matematyczna transpozycja tych wszystkich przyrodniczych kształtów, które fascynowały mnie podczas chłopięcych – polnych i leśnych – wędrówek. No i prowokowało do równie osobliwych pytań.

Co mnie najbardziej fascynuje we fraktalach? Przede wszystkim to, że są one obszarem, gdzie matematyka – tak pozornie martwa i lodowata – styka się i przeplata z fenomenem życia, tkając piękno jego form według własnych ścisłych reguł.

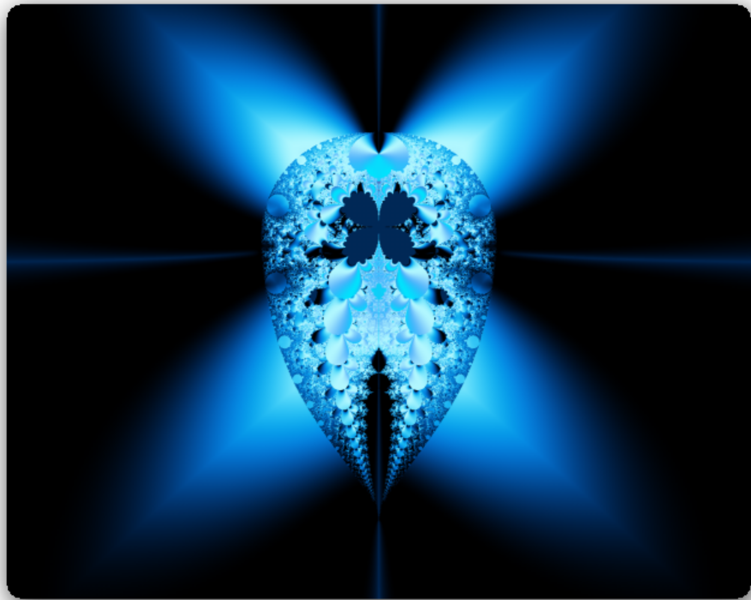
W tej broszurce znajdziesz moje spojrzenia na teoretycznie nieskończony ogród fraktali. Chcąc pokazać Ci jego niezwykłą harmonię, starałem się w jak najmniejszym stopniu ingerować graficznie w powstałe obrazy, a jako pędzla używać tylko matematycznych algorytmów.

Jeżeli zawarte tu informacje i grafiki zainspirują Cię do zadawania nowych, dziwnych i odważnych pytań, jeżeli zachęcą do filozoficznych rozważań i skierują na Twoje własne odkrywcze wyprawy do fraktalnego świata, będę mógł powiedzieć, że warto je było udostępnić.

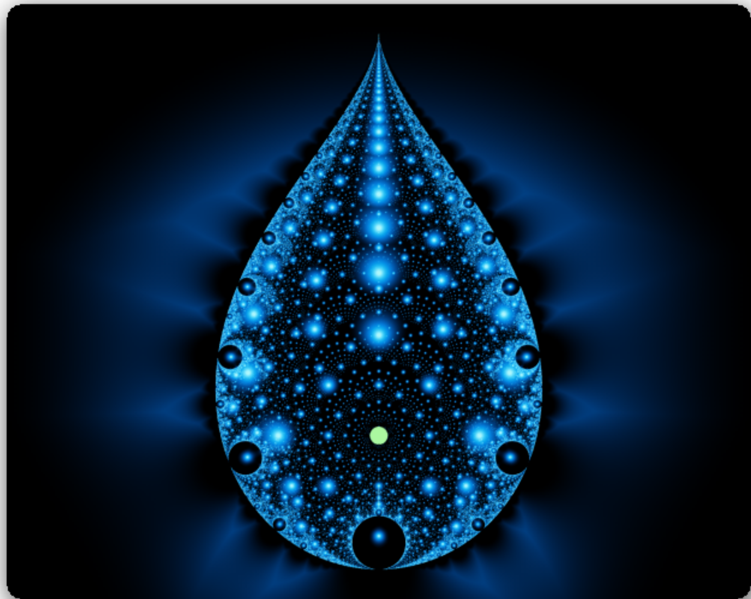
## Mała galeria autora



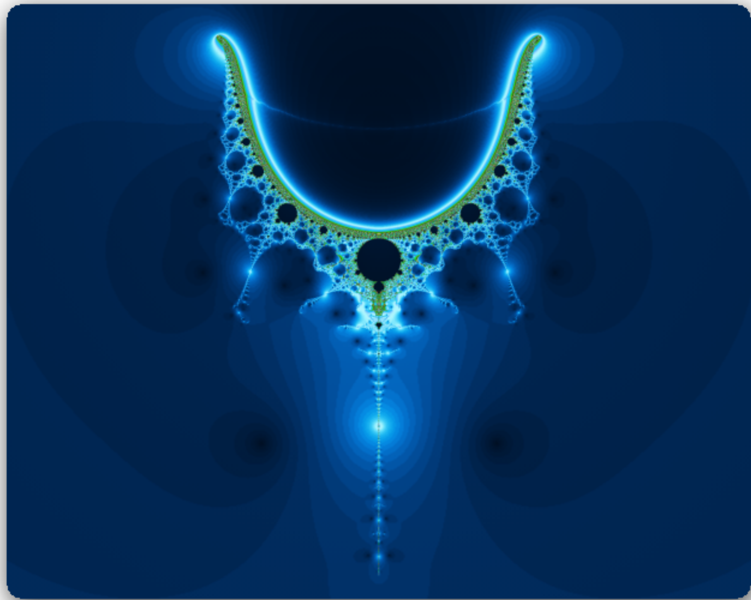
il. 7: *Medytacja*



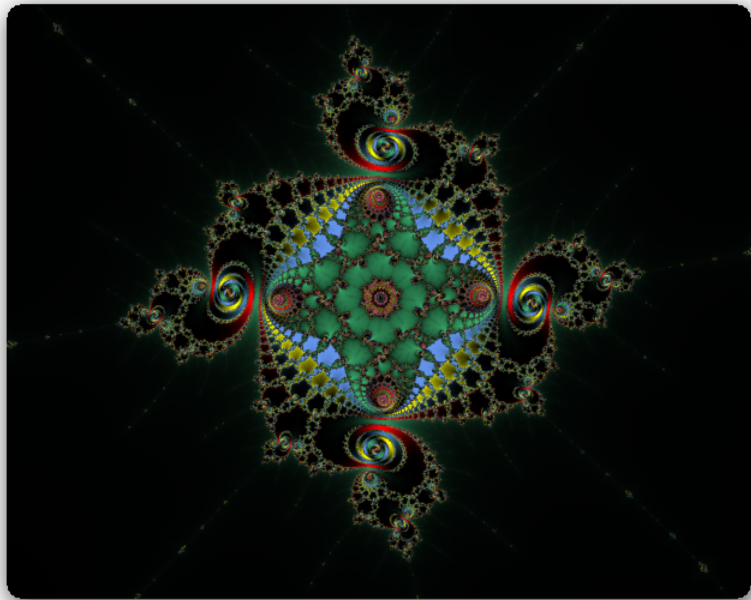
il. 8: *Archanioł*



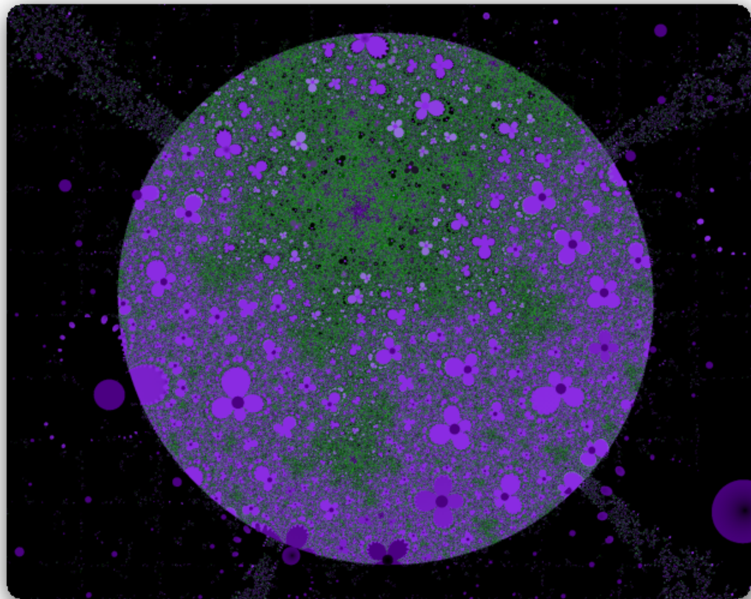
il. 9: *Kropla*



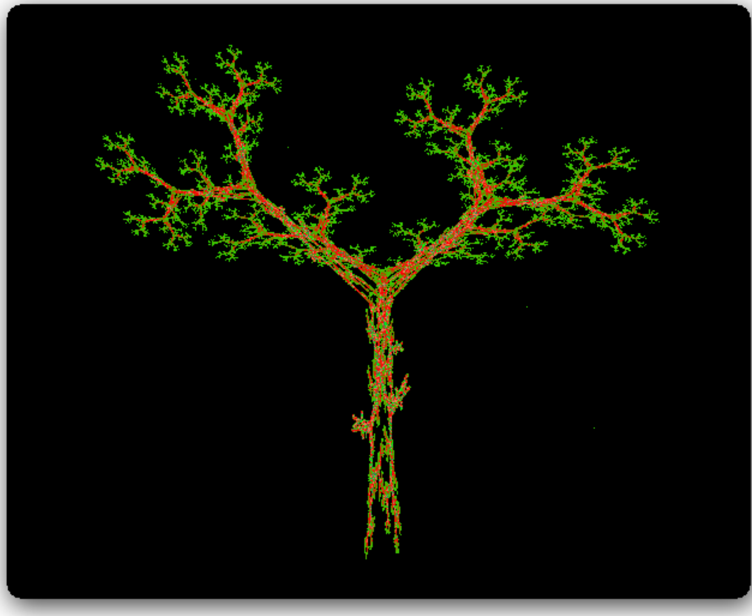
il. 10: *Lira aniołów*



il. 11: *Mandala księżycowego ogrodu*

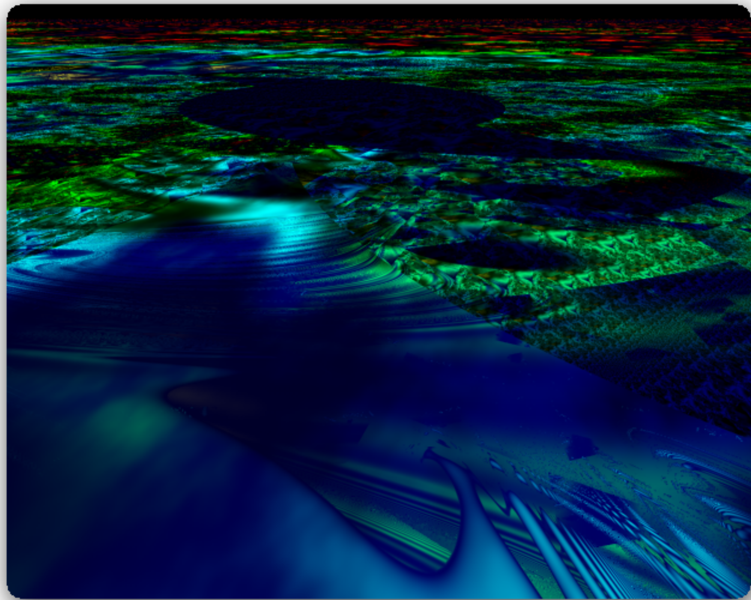


il. 12: *Planeta fiołków*

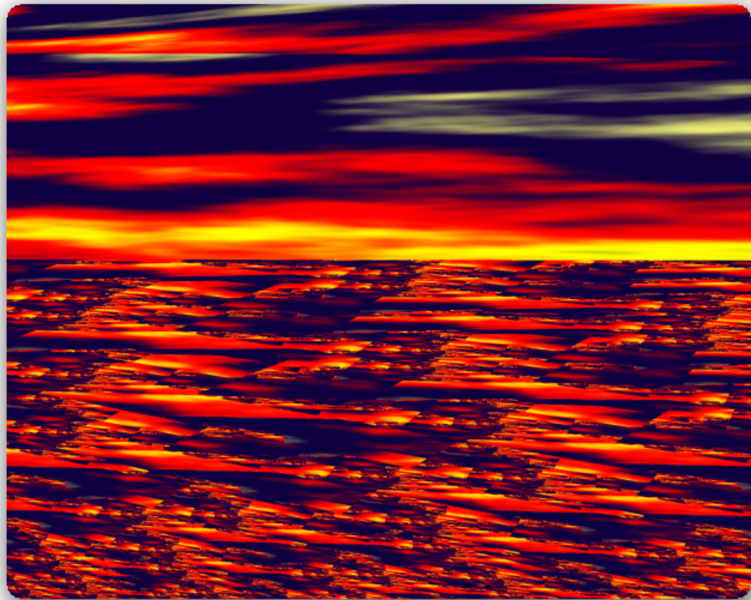


il. 13: *Koralowe drzewo*

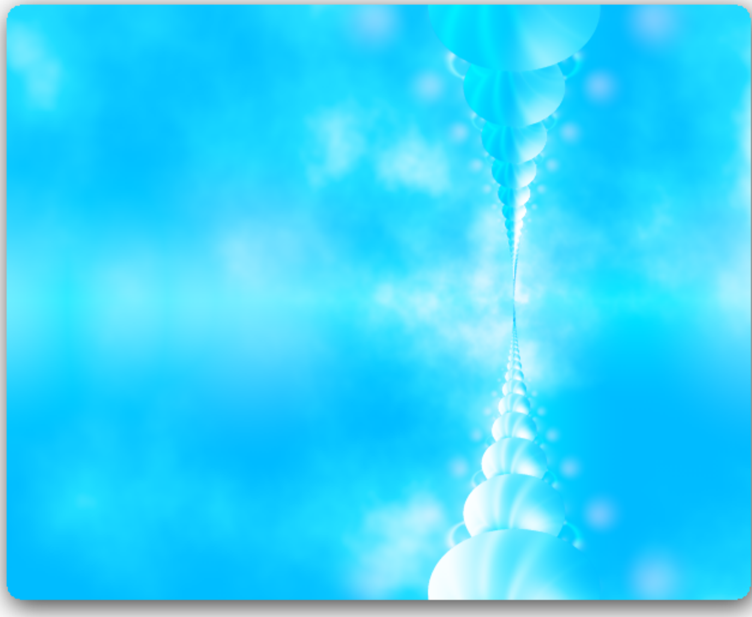
il. 14: *Pinia*



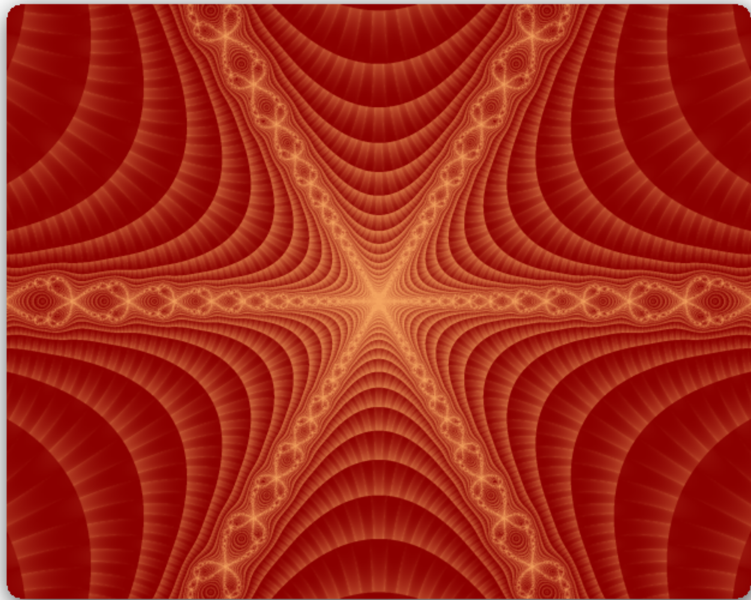
il. 15: *Nocny pejzaż na planecie KPY-347LV-CS4*



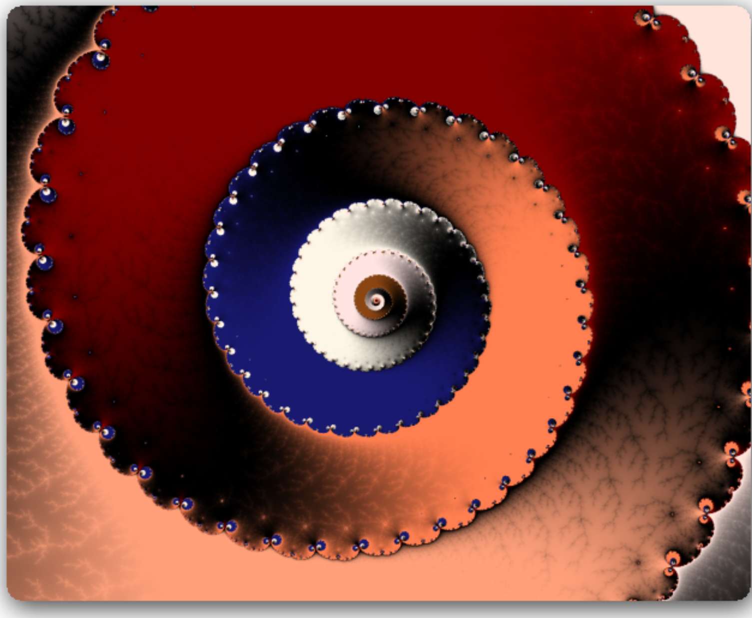
il. 16: *Morze*



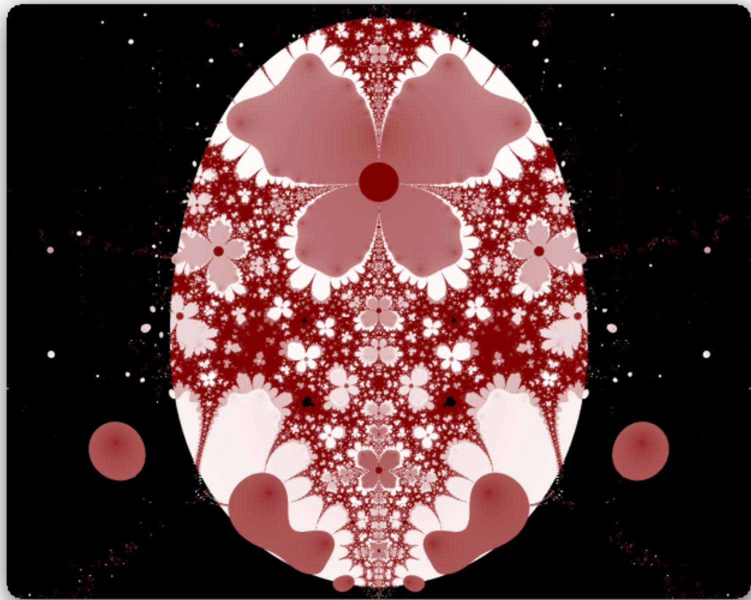
il. 17: *Most przez niebo*



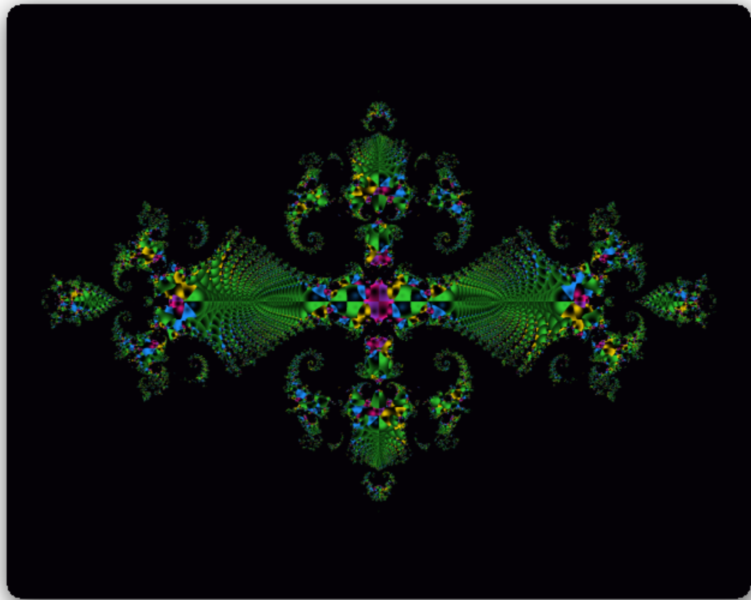
il. 18: *Kolumny Ramzesa*



il. 19: *Galaktyka*

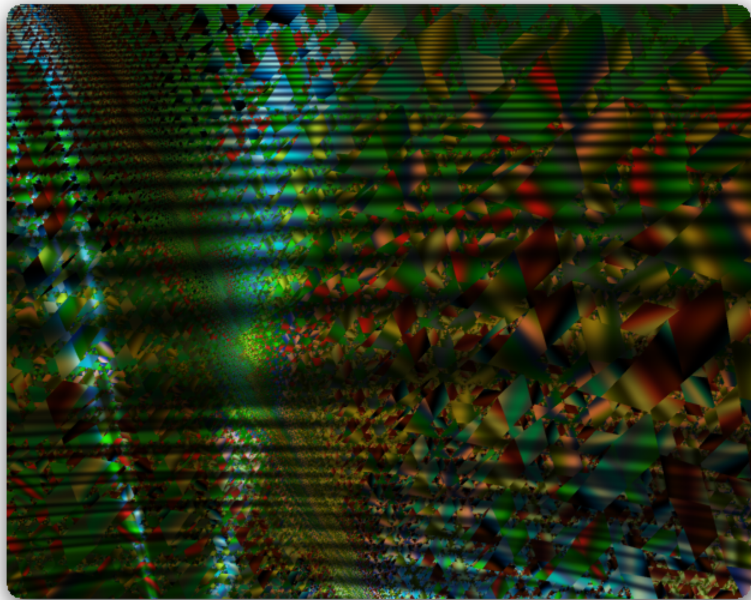


il. 20: *Pisanka*

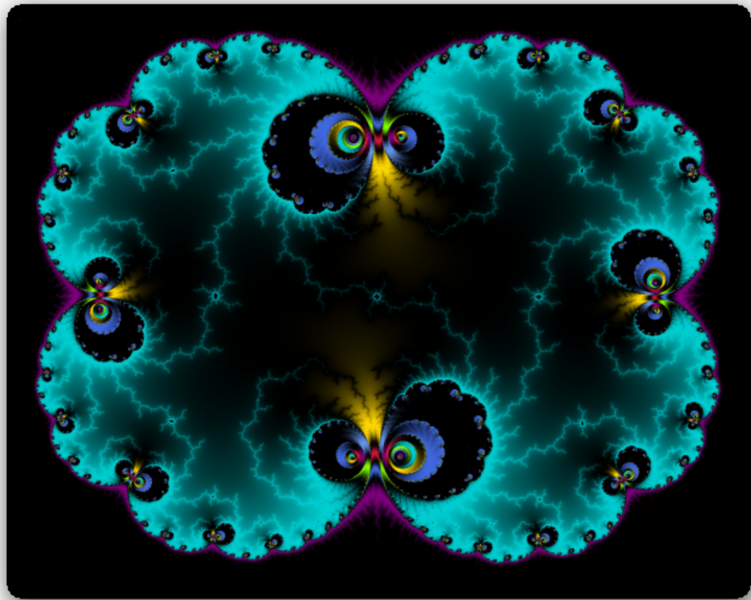


il. 21: *Witraż*

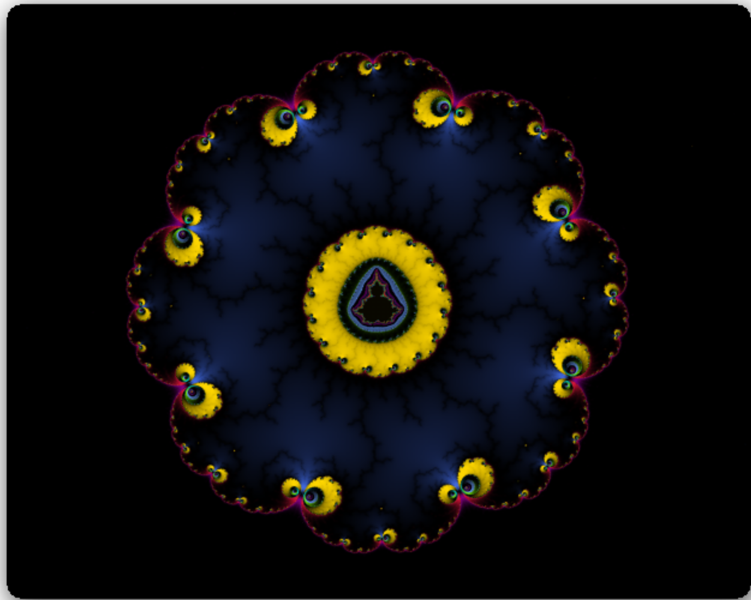
il. 22: *Psychodeliczna rozeta*



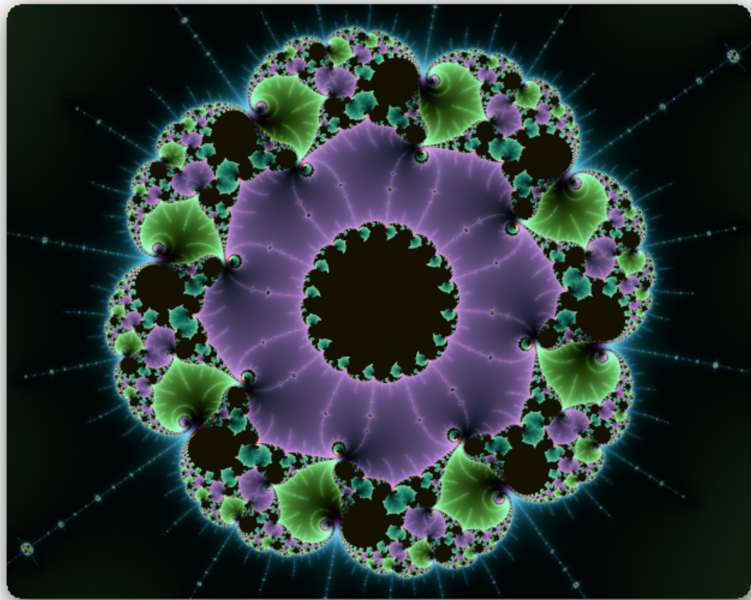
il. 23: *Kotara*



il. 24: *Strefa jedwabiu*

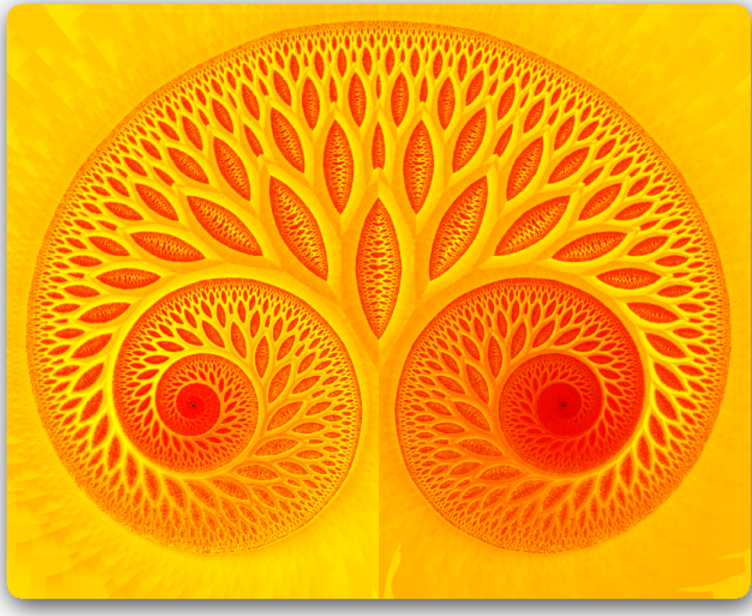


il. 25: *Kwiat Salomona*



il. 26: *Północny ogród*

il. 27: *Girlanda*



il. 28: *Drzewo Słońca*